Laplacesche Transformation und Operatorenrechnung.

Von

Karl Willy Wagner VDE, Berlin.

(Eingegangen am 10. 3. 1941.)

DK 517.942.82 : 517.432

Übersicht. Die Integralgleichung von Carson für die Einschaltaufgabe. Lösung durch das komplexe Integral. Physikalische Bedeutung der Operatorfunktion. Mathematische Bedingungen. Das Laplacesche Integral und die hierdurch vermittelte Funktionentransformation. Lösung der Einschaltaufgabe mittels Laplacescher Transformation. Die Transformation als Grundlage der Operatorenrechnung. Grundgedanke der Rechnung mit den beiden Darstellungsformen. Beide sind gleichwertig. Untersuchung der Zweckmäßigkeit der beiden Auffassungen vom Standpunkt des Ingenieurs und Physikers.

Wie Carson im Jahre 1922 gezeigt hat[1]), hängt die Heavisidesche Operatorfunktion $f(p)$ eines Einschaltvorganges, der von der Einschaltkraft 1 hervorgerufen wird, mit der Zeitfunktion $A(t)$, die den Einschaltvorgang beschreibt, durch die Integralgleichung

$$\frac{f(p)}{p} = \int_0^\infty e^{-pt} A(t)\,dt \tag{1}$$

zusammen.

Auf Grund von Überlegungen, die sich auf die Darstellung beliebig gegebener Zeitfunktionen durch das Fouriersche Integral stützen, kann man ohne Operatoren rechnung zeigen[2]), daß die Einschaltaufgabe durch das Integral

$$A(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} \frac{f(p)}{p} e^{pt}\,dp \tag{2}$$

gelöst wird. Der Integrationsweg soll die auf der imaginären Achse etwa vorhandenen singulären Stellen des Integranden rechts umgehen. $f(p)$ ist als Übergangsfunktion im eingeschwungenen Zustand definiert, bei dem e^{pt} den zeitlichen Verlauf der äußeren Kraft (z. B. der EMK) und $f(p)\,e^{pt}$ den zeitlichen Verlauf der gesuchten Größe darstellt. Die Gl. (2) führt die Lösung der Einschaltaufgabe auf die viel einfachere Lösung derselben Aufgabe für den eingeschwungenen Zustand vom Verlauf e^{pt} zurück. Dabei kann p jede beliebige reelle oder komplexe Zahl sein; wählt man p rein imaginär, etwa $p = i\omega$, so hat man eingeschwungenen Wechselstrom der Kreisfrequenz ω.

Die Übergangsfunktion $f(p)$ hat in jedem Fall eine einfache physikalische Bedeutung. Zum Beispiel ist für den Fall eines elektrischen Schwingungskreises, für den der Strom bei gegebener EMK zu berechnen ist,

$$f(p) = \left(R + pL + \frac{1}{pC}\right)^{-1}.$$

Für $p = i\omega$ bedeutet $f(p)$ den Scheinleitwert des Kreises für harmonische Schwingungen der Kreisfrequenz ω.

Das Integral Gl. (2) ist zugleich die Lösung der Integralgleichung (1), mit der Nebenbedingung, daß $A(t) = 0$ für alle negativen Werte von t sein soll. Diese Forderung ist von selbst erfüllt, wenn $f(p)$, als analytische Funktion der komplexen Veränderlichen p betrachtet, in der rechten Halbebene $\Re p > 0$ sich regulär verhält. Außer-

[1]) John R. Carson, „The Heaviside operational calculus", Bell Syst. techn. J. 1 (1922) H. 2, S. 43. Carson schreibt $1/H(p)$ statt $f(p)$.

[2]) K. W. Wagner, „Über eine Formel von Heaviside zur Berechnung von Einschaltvorgängen (mit Anwendungsbeispielen)", Arch. Elektrotechn. 4 (1916) S. 159.

dem soll auf Kreisen, die man mit beliebig großem Radius R um den Nullpunkt $p = 0$ zieht, überall

$$|f(p)| \leq M$$

sein, wobei M eine feste, endliche Zahl bedeutet. Diese zweite Bedingung erweist sich immer als erfüllt, wenn man $f(p)$ als Übergangsfunktion aus praktischen Aufgaben der Physik und Technik berechnet.

Auch die erste Bedingung, daß $f(p)$ keine Singularitäten in der rechten Halbebene ($\Re p > 0$) haben soll, ist für alle sog. passiven physikalischen Systeme erfüllt; das sind Anordnungen ohne verborgene innere Energiequellen. Hiermit wären also z. B. elektrische Stromkreise mit Verstärkern ausgeschlossen; denn die zugehörigen Übergangsfunktionen haben Pole mit positivem Realteil. Man kann jedoch auch für solche Anordnungen die Funktion $A(t)$, die den Einschaltvorgang beschreibt, berechnen, wenn man den Integrationsweg in Gl. (2) so verformt, daß die Pole links von ihm bleiben. Das läßt sich z. B. dadurch erreichen, daß man den Integrationsweg zu sich selbst parallel genügend weit nach rechts verschiebt:

$$A(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{f(p)}{p} e^{pt} \, dp. \tag{2a}$$

Der Festwert c muß größer sein als der Realteil des am weitesten rechts liegenden Pols.

Schreibt man die Gl. (1) in der Form

$$\varphi(p) = \int_0^\infty e^{-pt} A(t) \, dt, \tag{3}$$

so stellt sie zwischen den Funktionen $\varphi(p)$ und $A(t)$ eine mathematische Beziehung dar, die vor einem Jahrhundert von dem Mathematiker Laplace zur Untersuchung der Zusammenhänge zwischen Potenzreihen und ihren Koeffizienten benutzt worden ist. Man nennt daher das Integral auf der rechten Seite ein Laplacesches Integral.

Mathematisch gesehen, bedeutet die Gl. (3), ebenso auch wie die Gl. (1) u. (2) eine Funktionentransformation; das ist eine Rechenvorschrift, die eine Funktion, z. B. $A(t)$ in eine andere Funktion einer anderen Veränderlichen, z. B. $f(p)$ umwandelt. Die Eigenschaften solcher Funktionentransformationen sind seit 1886 besonders von dem italienischen Mathematiker S. Pincherle und seit 1920 von dem deutschen Mathematiker G. Doetsch[1]) untersucht worden. Doetsch konnte u. a. zeigen, daß Einschaltaufgaben aus der Theorie der Wärmeleitung und der elektrischen Leitungen durch die Transformation mittels des Laplaceschen Integrals gelöst werden können.

Zwischen dieser Berechnungsart und der Operatorenrechnung von Heaviside besteht ein enger Zusammenhang, wie sich aus der Beziehung der Operatorfunktion $f(p)$ zum Laplaceschen Integral auf der rechten Seite von Gl. (1) unmittelbar ergibt. In der Tat konnte der Verfasser die Operatorenrechnung mittels der durch die Gl. (1) u. (2) gegebenen Funktionentransformationen erweitern, exakt begründen und von den Unsicherheiten befreien, die der Darstellung von Heaviside anhaften[2]).

Im Hinblick auf Unklarheiten, die im Schrifttum hinsichtlich des Zusammenhanges und des Geltungsbereiches der in beiden Darstellungsarten benutzten Funktionentransformationen zu Tage getreten sind, werden diese Beziehungen im folgenden kurz auseinandergesetzt.

Gemeinsam ist beiden Darstellungen der Grundgedanke der Rechnung; sie besteht aus folgenden Schritten:

---

[1]) G. Doetsch, „Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation", Berlin 1937. Hier findet man auch eine Übersicht über die gesamte mathematische Literatur, während das Schrifttum aus der Technik fehlt.

[2]) K. W. Wagner, „Operatorenrechnung nebst Anwendungen in Physik und Technik". Leipzig: J. A. Barth 1940.

a) Die Aufstellung des Ansatzes zur Bestimmung der Zeitfunktion, etwa $A(t)$. Man erhält aus den Bedingungen der physikalisch-technischen Aufgabe eine Gleichung oder ein System von Gleichungen, in denen $A(t)$ und andere unbekannte und gegebene Funktionen nebst ihren Ableitungen nach der Zeit und gegebenenfalls nach den Ortskoordinaten enthalten sind. Daneben sind in der Regel die Anfangswerte der unbekannten Funktionen vorgeschrieben; hängen diese Funktionen von Ortskoordinaten ab, so treten noch Randbedingungen hinzu. Anstatt der Differentialquotienten können auch endliche Differenzen der unbekannten Funktionen vorkommen. Manchmal erscheint die Aufgabe als Integralgleichung verkleidet.

b) Der gesamte Ansatz wird mittels des Laplaceschen Integrals aus dem Bereich der Zeitvariabeln t in den Bereich der Variabeln p transformiert [Gl. (1) oder Gl. (3)]. Die Berechnung des Integrals kann man meistens ersparen, da für die gewöhnlich vorkommenden bekannten Funktionen von t die zugehörigen Laplaceschen Integrale bereits berechnet und in Tabellen zusammengestellt sind, die man in den Lehrbüchern findet. Für die Laplaceschen Integrale der unbekannten Funktionen schreibt man einfach neue Buchstaben.

Hier macht es nun einen Unterschied, ob man die Funktion $\varphi(p)$ nach Gl. (3) benutzt oder die Funktion $f(p)$ nach Gl. (1). Wir nennen $\varphi(p)$ in Übereinstimmung mit Doetsch die **Bildfunktion**; $f(p)$ werde zur Unterscheidung als **Operatorfunktion** oder kurz als **Unterfunktion** bezeichnet[1]). Der Unterschied ist, wie man sieht, mehr formal als sachlich; wir kommen noch darauf zurück.

c) Nun wird die Aufgabe im Unterbereich gelöst, d. h. man drückt die Bildfunktion $\varphi(p)$ oder die Operatorfunktion $f(p)$ durch die gegebenen Größen bzw. durch die daraus transformierten Größen aus. Die Lösung im Unterbereich ist fast immer viel leichter durchzuführen als im Oberbereich; hierin beruht eben der Vorteil dieses Rechenverfahrens.

d) Zuletzt wird die Bildfunktion $\varphi(p)$ bzw. die Operatorfunktion $f(p)$ in den Oberbereich zurücktransformiert; man erhält so unmittelbar die gesuchte Funktion $A(t)$. Zur Rücktransformierung wird man in erster Linie wieder auf die unter b erwähnten Tafeln ausgerechneter Laplacescher Integrale zurückgehen. Falls die gesuchte Funktion darin nicht enthalten ist, wird es oft möglich sein, aus der gegebenen Bild- oder Unterfunktion mittels der für die Laplacesche Transformation geltenden Rechenregeln[2]) andere Funktionen herzuleiten, die sich mittels der Tafel transformieren lassen. Wenn auch dieses Mittel versagt, kann man $A(t)$ durch die Transformationsformel (2) unmittelbar berechnen, wobei man sich oft mit Vorteil der bekannten Regeln der Funktionentheorie (Cauchyscher Satz u. a.) bedient. Falls man die Rechnung auf die Bildfunktion $\varphi(p)$ abgestellt hat, braucht man in Gl. (2) nur $\varphi(p)$ an Stelle von $f(p)/p$ einzusetzen.

Aus der vorstehenden Darlegung ergibt sich, daß die Rechenweise mit der Operatorfunktion $f(p)$ sachlich genau auf das gleiche hinauskommt wie das Rechnen mit der Bildfunktion $\varphi(p)$. **Anwendungsmöglichkeiten und Geltungsbereich stimmen für beide Funktionen vollkommen überein.**

Sieht man von persönlicher Vorliebe für die eine oder andere Funktion ab, so können also nur noch Gründe der Zweckmäßigkeit die Wahl zugunsten der einen oder andern entscheiden. In diesem Punkt wird möglicherweise die Stellungnahme der reinen Mathematiker von der der Ingenieure und Physiker abweichen. Da ich kein Mathematiker bin, kann ich die Frage nur von unserem technisch-physikalischen Standpunkt beurteilen. Von hier aus betrachtet ergibt sich folgendes:

---

[1]) Die zugehörige Zeitfunktion $A(t)$ heißt entsprechend die Oberfunktion (bei Doetsch „Objektfunktion"). In dieser Terminologie bezeichnet man sinngemäß t als Obervariable, p als Untervariable, den t-Bereich als Oberbereich, den p-Bereich als Unterbereich.

[2]) Siehe z. B. K. W. Wagner, „Operatorenrechnung nebst Anwendungen in Physik und Technik". Abschnitt 10, S. 50—68. Leipzig: J. A. Barth 1940.

1. Die einander entsprechenden Funktionen $A(t)$ und $f(p)$ des Ober- und Unterbereichs haben dieselbe Dimension. Diese Tatsache erleichtert die Nachprüfung der Formeln, die immer erwünscht ist, wenn es sich um weniger übersichtliche Berechnungen handelt. Dagegen haben $\varphi(p)$ und $A(t)$ verschiedene Dimensionen.

2. Ist $A(t)$ ein Festwert, etwa eine EMK E, so bedeutet $f(p)$ dieselbe konstante EMK E; hingegen ist $\varphi(p) = E/p$ eine Funktion von p.

3. $f(p)$ hat die einfache physikalische Bedeutung der Übergangsfunktion im eingeschwungenen Zustand; in dem am Anfang erwähnten Beispiel des elektrischen Schwingungskreises ist $f(p)$ der Scheinleitwert. Für $\varphi(p)$ besteht kein so einfacher Zusammenhang mit den Eigenschaften des physikalischen Systems. Hingegen hat $\varphi(p)$ eine einfache mathematische Bedeutung. Zerlegt man nämlich $A(t)$ mittels des Fourierschen Integrals in ein kontinuierliches Spektrum von harmonischen Schwingungen, so stellt $\varphi(i\omega)$ die komplexe Amplitude in diesem Spektrum dar. Hierauf läßt sich eine Erweiterung der Fourierschen Integraldarstellung gründen[1]).

4. Für das Funktionenpaar $A(t)$ und $f(p)$ gilt das Ähnlichkeitsgesetz: Ersetzt man $A(t)$ durch $A(t/T)$, wobei T ein Festwert ist, so geht $f(p)$ in $f(pT)$ über. Der Ähnlichkeitssatz, das ist die reziproke Transformation der Maßstäbe im Ober- und Unterbereich, ist eine für die praktischen Anwendungen sehr nützliche Regel. Für die Bildfunktion gilt sie nicht; denn man muß hier außer der Transformation der Maßstäbe noch den Faktor T zu $\varphi(pT)$ hinzusetzen.

5. Unverändert bleiben in beiden Rechnungsweisen das Additionsgesetz und die Regeln über die Verschiebung der Veränderlichen und das Integrieren im Oberbereich. Wenig verschieden sind die Regeln für das Differenzieren im Oberbereich. Die Regeln

Übersicht zusammengehöriger Funktionen.

Oberbereich	Unterbereich	
$A(t)$	$f(p)$	$\varphi(p)$
$A\left(\frac{t}{T}\right)$	$f(pT)$	$T\varphi(pT)$
$A_1(t) + A_2(t)$	$f_1(p) + f_2(p)$	$\varphi_1(p) + \varphi_2(p)$
$A(t-\lambda)$	$e^{-\lambda p} f(p)$	$e^{-\lambda p}\varphi(p)$
$\int_0^t A(\xi)\,d\xi$	$\frac{1}{p} f(p)$	$\frac{1}{p}\varphi(p)$
$\frac{dA}{dt}$	$p f(p) - p A(0)$	$p\varphi(p) - A(0)$
$e^{-\alpha t} A(t)$	$\frac{p}{p+\alpha} f(p+\alpha)$	$\varphi(p+\alpha)$
$t A(t)$	$-p \frac{d}{dp}\left(\frac{f(p)}{p}\right)$	$\frac{d\varphi}{dp}$
$\frac{A(t)}{t}$	$p \int_p^\infty \frac{f(\eta)}{\eta}\,d\eta$	$\int_p^\infty \varphi(\eta)\,d\eta$
$\frac{d}{dt}\int_0^t A_1(\tau) A_2(t-\tau)\,d\tau$	$f_1(p) \cdot f_2(p)$	$p\varphi_1(p) \cdot \varphi_2(p)$
$\int_0^t A_1(\tau) A_2(t-\tau)\,d\tau$	$\frac{f_1(p) \cdot f_2(p)}{p}$	$\varphi_1(p) \cdot \varphi_2(p)$

[1]) K. W. Wagner, Alta Frequ. 10 (1941) S. 195.

für die entsprechenden Operationen im Unterbereich werden für die Bildfunktion etwas einfacher. Beim Faltungssatz tritt noch eine Differentiation hinzu, wenn man die Operatorfunktion $f(p)$ benutzt. Die vorstehende Übersicht zeigt die Übereinstimmungen und Unterschiede.

Die unter 1 bis 4 angeführten Gesichtspunkte sind solche allgemeiner Art, während es sich im Punkt 5 nur um wenig belangvolle Unterschiede im Rechenmechanismus handelt. Das Hauptgewicht der Gründe spricht mithin zugunsten der Verwendung der Operatorfunktion $f(p)$ im Bereich der praktischen Anwendungen.

Zusammenfassung.

Im technischen Schrifttum wird die Laplacesche Transformation in zwei verschiedenen Arten verwendet. Die eine führt zu der aus den praktischen Anwendungen her bekannten Operatorfunktion, die andere benutzt die rein mathematisch definierte Bildfunktion. Es wird gezeigt, daß beide Rechnungsweisen den gleichen Anwendungs- und Geltungsbereich haben und daß mithin lediglich Zweckmäßigkeitsgründe die Wahl zwischen ihnen entscheiden können. Vom Standpunkt der technischen und physikalischen Anwendungen wird diese Frage untersucht. Die sich hieraus ergebenden Gesichtspunkte sprechen überwiegend für die Benutzung der Operatorfunktion.

Abgeschlossen im August 1941.